4.4 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Los ángulos que por su funcionalidad se emplean comúnmente son 30°, 45° y 60°, a estos se les conoce como ángulos notables. Realiza la siguiente actividad para descubrir cómo obtener el valor de las razones trigonométricas para los ángulos notables.

→ Actividad de aprendizaje 25. Razones trigonométricas de ángulos notables.

Una técnica sencilla para conocer el valor de las razones trigonométricas de los ángulos notables sin la necesidad de utilizar una calculadora consiste en el uso de triángulos con medidas específicas como veremos a continuación.

1. Para los ángulos de 30° y 60° se utiliza un triángulo equilátero cuyos lados miden 2 unidades como el que se muestra en la figura 1. Al triángulo se le divide en dos partes iguales formando dos triángulos rectángulos como se muestra en la figura 2. Si nos quedamos con uno de los triángulos rectángulos como se muestra en la figura 3 podemos ver que este tiene ángulos de 30° y 60°, su base mide 1 unidad, su hipotenusa 2 unidades y su altura √3 unidades (altura calculada usando el teorema de Pitágoras).

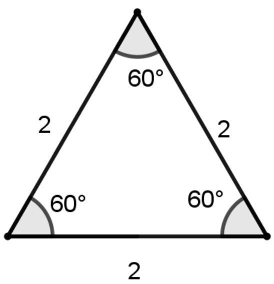


Figura 1

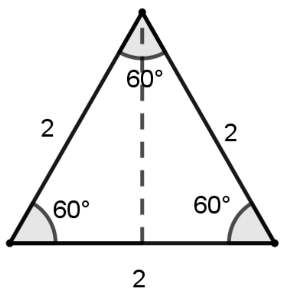


Figura 2

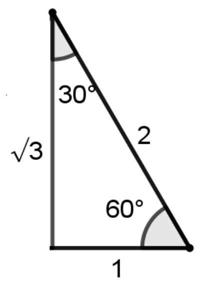


Figura 3

Escribe las razones trigonométricas para los ángulos de 30° y 60° utilizando las medidas del triángulo de la figura 3.

$sen(30°) = \_\_\_\_$ $\qquad$ $sen(60°) = \_\_\_\_$

$cos(30°) = \_\_\_\_$ $\qquad$ $cos(60°) = \_\_\_\_$

$tan(30°) = \_\_\_\_$ $\qquad$ $tan(60°) = \_\_\_\_$

2. Para un ángulo de 45° se utiliza un cuadrado cuyos lados midan 1 unidad como se muestra en la figura 4. Si dividimos el cuadrado utilizando una diagonal obtendremos dos triángulos rectángulos como los de la figura 5. Si nos quedamos con uno de los triángulos rectángulos como se muestra en la figura 6 tendremos el ángulo de 45°, una base cuya medida es de 1 unidad, una altura de 1 unidad e hipotenusa con medida de √2 unidades (la hipotenusa se calculó utilizando el teorema de Pitágoras).

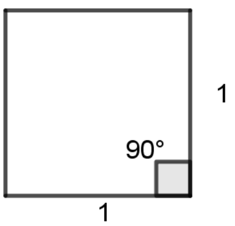


Figura 4

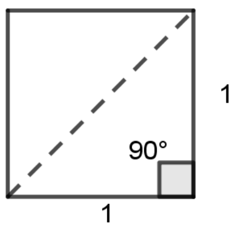


Figura 5

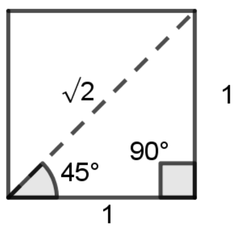


Figura 6

Escribe las razones trigonométricas para el ángulo de 45° utilizando las medidas del triángulo de la figura 6.

$sen(\ 45°\ ) = \_\_\_\_$ $\qquad cos(45°\ ) = \_\_\_\_$ $\qquad tan(\ 45°) = \_\_\_\_$

Como vimos en la actividad anterior las razones trigonométricas para los ángulos notables tienen unos valores bastante particulares, los cuales son fáciles de memorizar si los acomodamos como se muestra en la siguiente imagen:

	0°	30°	45°	60°	90°
Sen α =	√0	1	2	3	4
			2		
Cos α =	√4	3	2	1	0
			2		
Tg α =	√0	1	2	3	4
	√4	3	2	1	0

Primero escribimos los ángulos notables 0°, 30°, 45°, 60° y 90°, debajo de estos ángulos escribimos lo siguiente:

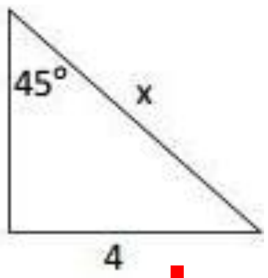
Para el seno dibujamos una raíz grande y dentro de ella escribimos los números del 0 al 4, después marcamos una línea grande debajo de la raíz y debajo de la línea escribimos el número 2.

Para el coseno dibujamos una raíz grande y dentro de ella escribimos los números del 4 al 0, después marcamos una línea grande debajo de la raíz y debajo de la línea escribimos el número 2.

Para la tangente dibujamos una raíz grande y dentro de ella escribimos los números del 0 al 4, después marcamos una línea grande debajo de la raíz, debajo de la línea dibujamos otra raíz grande y dentro de ella escribimos los números del 4 al 0.

El valor del seno de cualquiera de los ángulos notables es la raíz del número que corresponde a la columna del ángulo a calcular dividido entre 2.

Ejemplo 1: Encuentra el valor de x.



	0°	30°	45°	60°	90°
Sen α =	√0	1	2	3	4
			2		
Cos α =	√4	3	2	1	0
			2		
Tg α =	√0	1	2	3	4
	√4	3	2	1	0

Para resolver este problema utilizamos la razón trigonométrica del seno ya que el cateto opuesto mide 4 unidades y la hipotenusa x unidades.

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\mathrm{sen}(45°) = \frac{4}{x}$$

Sustituimos el valor de sen(45°) por $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{x}$$

Al despejar x nos queda (utilizando la regla de tres):

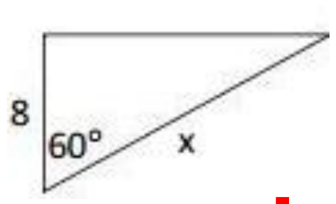
$$x = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

Para que el resultado no quede en fracción multiplicamos por $\sqrt{2}$ y dividimos entre $\sqrt{2}$

$$x = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

El valor del coseno de cualquiera de los ángulos notables es la raíz del número que corresponde a la columna del ángulo a calcular dividido entre 2.

Ejemplo 2: Encuentra el valor de x.



	0°	30°	45°	60°	90°
$Sen\ \alpha =$	$\sqrt{0}$	1	2	3	4
			2		
$Cos\ \alpha =$	$\sqrt{4}$	3	2	1	0
			2		
$Tg\ \alpha =$	$\sqrt{0}$	1	2	3	4
	$\sqrt{4}$	3	2	1	0

Para resolver este problema utilizamos la razón trigonométrica del coseno ya que el cateto adyacente es el lado que mide 8 unidades y la hipotenusa mide *x* unidades.

$$\cos(\theta) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\cos(60°) = \frac{8}{x}$$

Sustituimos el valor de cos(60°) por $\frac{\sqrt{1}}{2}$

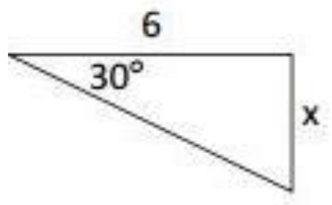
$$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{8}{x}$$

Al despejar x nos queda (utilizando la regla de tres):

$$x = \frac{2 \cdot 8}{\sqrt{1}} = \frac{16}{1} = 16$$

El valor la tangente de cualquiera de los ángulos notables es el cociente de las raíces de los números que corresponden a la comuna del ángulo a calcular.

Ejemplo 3: Encuentra el valor de x.



	0°	30°	45°	60°	90°
$Sen\ \alpha =$	$\sqrt{0}$	1	2	3	4
			2		
$Cos\ \alpha =$	$\sqrt{4}$	3	2	1	0
			2		
$Tg\ \alpha =$	$\sqrt{0}$	1	2	3	4
	$\sqrt{4}$	3	2	1	0

Para resolver este problema utilizamos la razón trigonométrica de la tangente ya que el cateto adyacente es el lado que mide 6 unidades y el cateto opuesto es el que mide *x* unidades.

$$\tan(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$\tan(30°) = \frac{x}{6}$$

Sustituimos el valor de tan(30°) por $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{x}{6}$$

Al despejar x nos queda (utilizando la regla de tres):

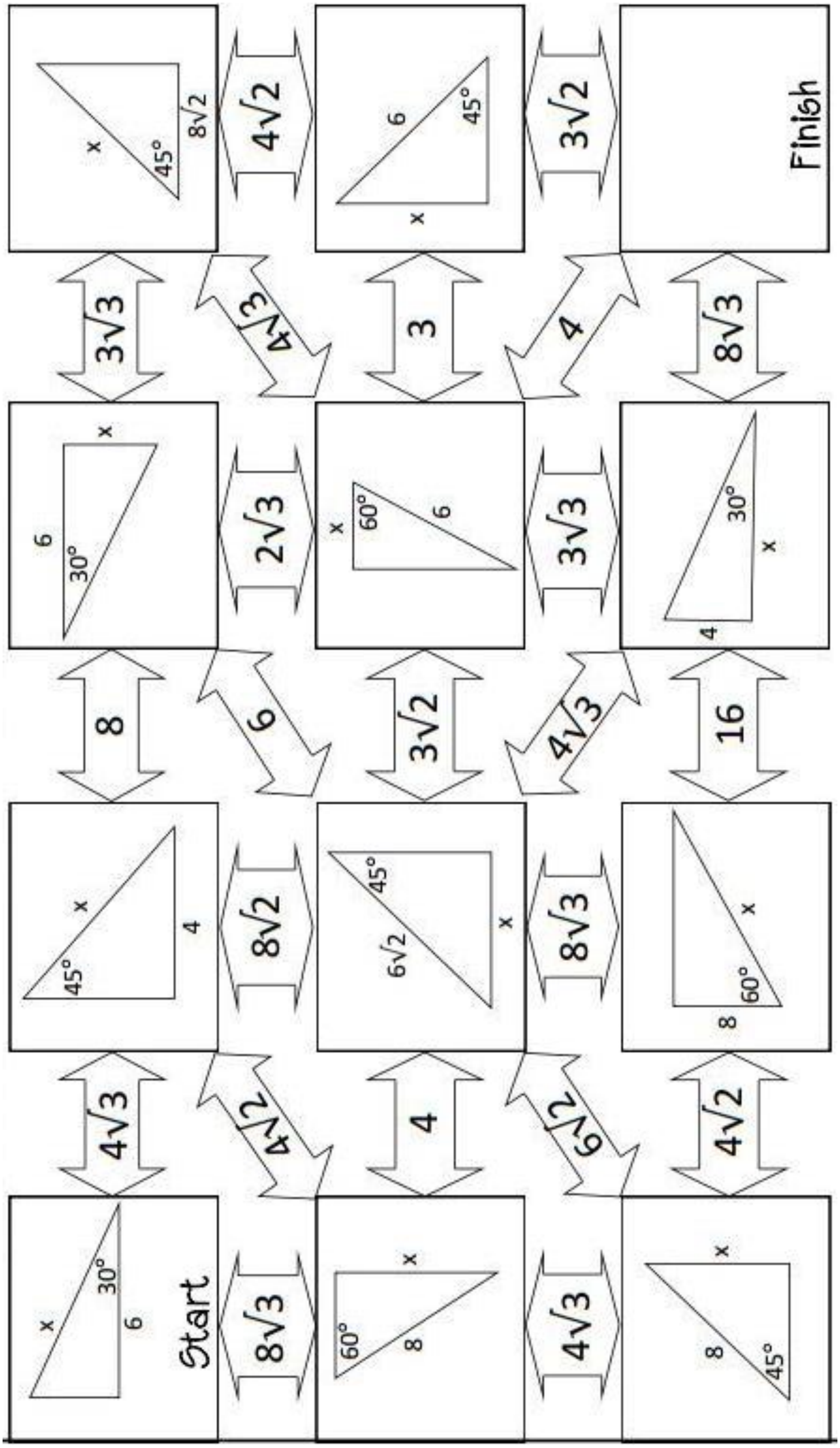
$$x = \frac{6 \cdot \sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot 1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Para que el resultado no quede en fracción multiplicamos por $\sqrt{3}$ y dividimos entre $\sqrt{3}$

$$x = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

→ Actividad de aprendizaje 26. Triángulos notables

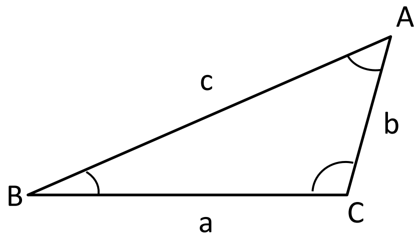
Encuentra el valor de x para cada uno de los triángulos utilizando los valores de las razones trigonométricas para los ángulos notables y encuentra el camino desde el inicio a la meta.



4.5 LEYES DE SENOS Y COSENOS

Las leyes de senos y cosenos se resolver problemas con triángulos oblicuángulos, a los triángulos que no son rectángulos se llaman oblicuángulos.

Consideremos el triangulo ABC que se muestra en la siguiente figura, con ángulos A, B y C y con lados opuestos a, b y c respectivamente. Si conocemos la longitud de un lado y otras dos partes del triángulo, podemos encontrar las tres partes restantes utilizando las leyes de senos y cosenos:



Ley de senos:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Ley de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cosA$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ cosA}$$

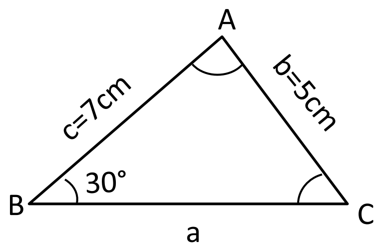
$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\ a\ c\ cosB}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\ a\ b\ cosC}$$

NOTA: Recuerda que la suma de sus ángulos internos de un triángulo siempre es igual a 180°.

Ejemplos:

1. Encuentra la medida del lado b y de los ángulos A y C del siguiente triángulo.



Aplicando la ley de senos tenemos:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Al utilizar una parte de la ley:

$$\frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

$$\frac{5}{sen\ (30°)} = \frac{7}{sen\ C}$$

Despejando *senC* tenemos (utilizando la regla de tres):

$$sen\ C = \frac{7 \cdot sen\ (30°)}{5}$$

$$sen\ C = 0.7$$

Aplicando la razón trigonométrica inversa arcoseno tenemos el valor del ángulo C:

$$C = \sin^{-1}(0.7) = 44.427°$$

Para encontrar el ángulo A debemos de restar a 180° las medidas de los ángulos B y C

$$A = 180° - B - C$$

$$A = 180° - 30° - 44.427° = 105.573°$$

Para encontrar la medida del lado *a* podemos utilizar la ley de senos y también la ley de cosenos como se muestra a continuación:

Ley de senos

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$$

$$\frac{a}{sen\,(105.573°)} = \frac{5}{sen\,(30°)}$$

Ley de cosenos

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cosA}$$

$$a = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2\,(5)(7)\,\cos(105.573°)}$$

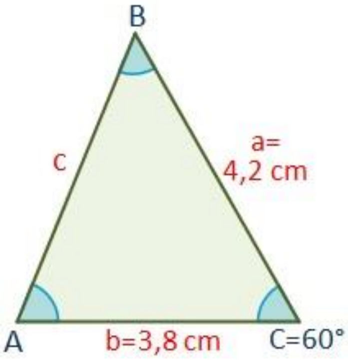
$$a = 9.632cm$$

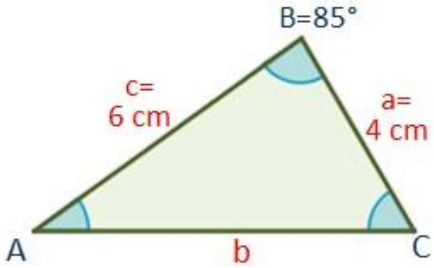
Despejando a (utilizando la regla de tres)

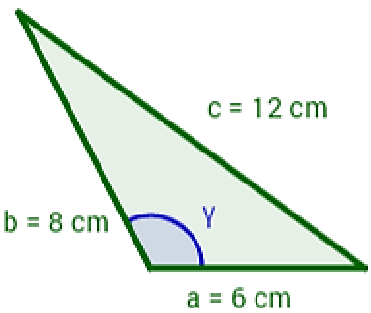
$$a = \frac{5 \cdot sen\,(105.573°)}{sen\,(30°)} = 9.632cm$$

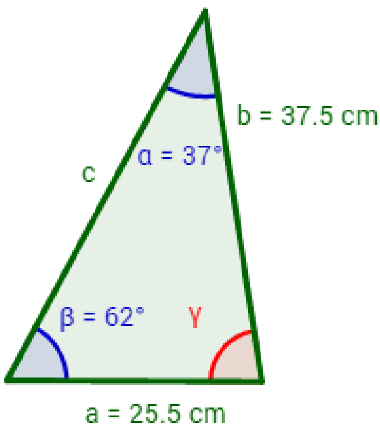
→ Actividad de aprendizaje 27. Triángulos oblicuángulos

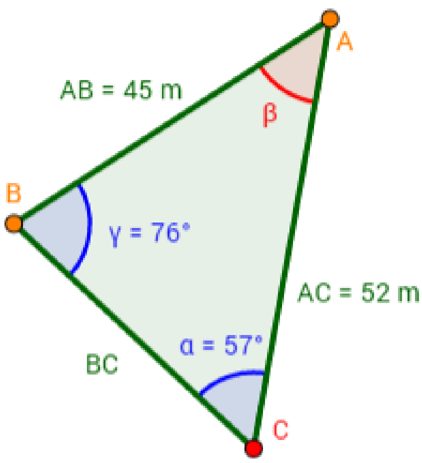
Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos:











4.6 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

En la rama de la trigonometría, se le llama identidades trigonométricas a la serie de relaciones o igualdades que existen entre las funciones trigonométricas.

Clasificación	Identidad trigonométrica	Despejes
Identidades reciprocas:	$\operatorname{sen}\theta \cdot \csc\theta = 1$	$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}$
		$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
	$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$
		$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
	$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
		$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
Identidades por cociente	$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$	$\tan\theta \cdot \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$
		$\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$
	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$	$\cot\theta \cdot \operatorname{sen}\theta = \cos\theta$
		$\operatorname{sen}\theta = \frac{\cos\theta}{\cot\theta}$
Identidades pitagóricas	$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
		$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$
	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$
		$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$	$1 = \csc^2\theta - \cot^2\theta$
		$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

Ejemplo 1: simplificar las siguientes expresiones

Como regla general, el primer paso para simplificar una expresión trigonométrica es que aparezcan solo senos y cosenos. Esto lo consigues utilizando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas como veremos a continuación.

a) $sen\,^3\theta + (sen\theta)(cos^2\theta)$

$$= sen\theta(sen^2\theta + cos^2\theta)$$
$$= sen\theta(1)$$
$$= sen\theta$$

b) $sec\theta - (sec\theta)(sen^2\theta)$

$$= sec\theta(1 - sen^2\theta)$$
$$= sec\theta(cos^2\theta)$$
$$= \frac{1}{cos\theta}(cos^2\theta)$$
$$= cos\theta$$

c) $sen\,^2\theta \cdot sec^2\theta - sec^2\theta$

$$= sec^2\theta(sen^2\theta - 1)$$
$$= sec^2\theta(-cos^2\theta)$$
$$= \frac{1}{\cos^2\theta}(-cos^2\theta) = -1$$

d) $tan\theta + \left(\frac{cos\theta}{1+sen\theta}\right)$

$$= \frac{sen\theta}{cos\theta} + \frac{cos\theta}{1+sen\theta}$$
$$= \frac{sen\theta(1+sen\theta) + cos^2\theta}{cos\theta(1+sen\theta)}$$
$$= \frac{sen\theta + sen^2\theta + cos^2\theta}{cos\theta(1+sen\theta)}$$
$$= \frac{sen\theta + 1}{cos\theta(1+sen\theta)}$$
$$= \frac{1}{cos\theta}$$
$$= sec\theta$$

Ejemplo 2: Comprobar las identidades trigonométricas

a) $\tan\alpha + \cot\alpha = \sec\alpha\csc\alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \sec\alpha \cdot \csc\alpha$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \sec\alpha \cdot \csc\alpha$$
$$\frac{1}{\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \sec\alpha \cdot \csc\alpha$$
$$\sec\alpha \cdot \csc\alpha = \sec\alpha \cdot \csc\alpha$$

b) $\frac{1}{sec^2\theta} = \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos^2\theta + \cos^4\theta$

$$\frac{1}{sec^2\theta} = \cos^2\theta\,(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$\frac{1}{sec^2\theta} = \cos^2\theta\,(1)$$
$$\frac{1}{sec^2\theta} = \cos^2\theta$$
$$\frac{1}{sec^2\theta} = \frac{1}{sec^2\theta}$$

c) $\cot\theta \cdot \sec\theta = \csc\theta$

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} = \csc\theta$$
$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \csc\theta$$
$$\csc\theta = \csc\theta$$

→ Actividad de aprendizaje 28. Identidades trigonométricas

1. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\cos\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$

b) $\cos^3\theta + \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta$

c) $\frac{1-cos^2\theta}{cos^2\theta}$

2. Comprueba las identidades trigonométricas:

a) $\cot\theta\sec\theta\sin\theta = 1$

b) $\csc\theta - \sin\theta = \cot\theta \cdot \cos\theta$

c) $\tan\theta \cdot \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

d) $\cos\theta = \sec\theta - \operatorname{sen}\theta \cdot \tan\theta$